ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ
Γ Λυκείου

ΖΗΤΗΜΑ ①

$\boxed{A1} \longrightarrow$ σελ 334 $\quad \boxed{A2} \longrightarrow$ σελ 246 $\quad \boxed{A3} \longrightarrow$ σελ 222

$\boxed{A4} \longrightarrow$ α) $\to$ Λ $\quad$ β) $\to$ Σ $\quad$ γ) $\to$ Σ $\quad$ δ) $\to$ Λ $\quad$ ε) $\to$ Σ

ΖΗΤΗΜΑ ②

$\boxed{B1}$ Από $(z-2)(\overline{z}-2) + |z-2| = 2 \Leftrightarrow |z-2|^2 + |z-2| = 2 \overset{|z-2|=x}{\Leftrightarrow}$

$x^2 + x - 2 = 0 \overset{x \geq 0}{\Leftrightarrow} x = 1$ δηλ. $\mathbf{|z-2| = 1}$

άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι κύκλος $\left\langle \begin{matrix} K(2,0) \\ \rho = 1 \end{matrix} \right.$

Είναι $|z| = |(z-2)+2| \leq |z-2| + 2 = 3$, δηλ. $\mathbf{|z| \leq 3}$ $\boxed{A}$

$\boxed{\text{2ος Τρόπος}}$ και γεωμετρικά αφού το σημείο A(3,0) του C απέχει $(OA)_{max} = 3$

$\boxed{B2}$ Έστω $z_{1,2} = x \pm yi$ οι 2 συζυγείς ρίζες της $w^2 + \beta w + \gamma = 0$.

Ισχύουν $\begin{cases} z_1 + z_2 = S \Leftrightarrow 2x = -\beta \text{ ①} \\ z_1 \cdot z_2 = P \Leftrightarrow z_1 \cdot \overline{z_1} = \gamma \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \gamma \text{ ②} \\ |\mathrm{Im}(z_1) - \mathrm{Im}(z_2)| = 2 \Leftrightarrow |2y| = 2 \Leftrightarrow \mathbf{|y| = 1} \text{ ③} \end{cases}$

Από την εξίσωση του κύκλου $(x-2)^2 + y^2 = 1 \overset{③}{\Leftrightarrow} (x-2)^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow \mathbf{x = 2}$

Έτσι $\left\langle \begin{matrix} ① \longrightarrow \boldsymbol{\beta = -4} \\ ② \longrightarrow \boldsymbol{\gamma = 5} \end{matrix} \right.$

$\boxed{\text{Β3}}$ Από τη σχέση $v^3 + \alpha_2 \cdot v^2 + \alpha_1 \cdot v + \alpha_0 = 0 \Leftrightarrow v^3 = -\alpha_2 \cdot v^2 - \alpha_1 \cdot v - \alpha_0$

άρα και $|v^3| = |-\alpha_2 \cdot v^2 - \alpha_1 \cdot v - \alpha_0| \le |-\alpha_2 \cdot v^2| + |-\alpha_1 \cdot v| + |-\alpha_0| \Leftrightarrow$

$$|v|^3 \le |\alpha_2| \cdot |v|^2 + |\alpha_1| \cdot |v| + |\alpha_0|$$

και αφού οι μιγαδικοί α_2, α_1, α_0 ανήκουν στον παραπάνω Γ. Τόπο θα ισχύει

από την $\boxed{\text{Α}}$ ότι $|\alpha_2| \le 3$, $|\alpha_1| \le 3$, $|\alpha_0| \le 3$ και έτσι έχουμε:

$|v|^3 \le 3|v|^2 + 3|v| + 3 \Leftrightarrow |v|^3 < 3|v|^2 + 3|v| + 4 \Leftrightarrow |v|^3 - 3|v|^2 - 3|v| - 4 < 0$

$\underset{\text{με το 4}}{\overset{\text{HORNER}}{\Longleftrightarrow}} \left(|v| - 4\right)\left(|v|^2 + |v| + 1\right) < 0 \Leftrightarrow \mathbf{|v| < 4}$

καθότι ο όρος $|v|^2 + |v| + 1 > 0$ αφού έχει $\Delta = 1 - 4 < 0$.

Ζήτημα ③

$\boxed{\text{Γ1}}$ Από υπόθεση $\left(f(x) + x\right)\left(f'(x) + 1\right) = x \Leftrightarrow 2\left(f(x) + x\right)\left(f(x) + x\right)' = 2x \Leftrightarrow$

$\left[\left(f(x) + x\right)^2\right]' = \left(x^2\right)' \Leftrightarrow \left(f(x) + x\right)^2 = x^2 + c$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε και για $x = 0$:

$\left(f(0) + 0\right)^2 = 0 + c \overset{f(0) = 1}{\Longleftrightarrow} c = 1$, άρα $\left(f(x) + x\right)^2 = x^2 + 1 \neq 0$.

Βλέπω ότι η συνεχής $f(x) + x \neq 0$ στο $\mathbb{R}$ οπότε θα διατηρεί **σταθερό πρόσημο** στο $\mathbb{R}$

και έτσι οι **πιθανοί τύποι** είναι $\left\langle \begin{array}{l} f(x) + x = \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow \mathbf{f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x} \\ f(x) + x = -\sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow f(x) = -\sqrt{x^2 + 1} - x \end{array} \right.$

Ο τύπος $f(x) = -\sqrt{x^2 + 1} - x$ δίνει $f(0) = -1$ και απορρίπτεται

$\boxed{\text{Γ2}}$ Από υπόθεση για την $g(x) = x^3 + \dfrac{3}{2}x^2 - 1$ δίνεται η εξίσωση $f\left(g(x)\right) = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f\left(g(x)\right) = f(0) \Leftrightarrow$ **$g(x) = 0$,** της οποίας θέλω να βρω πλήθος ριζών.

Όλα αυτά καθότι η $f(x)$ είναι συνάρτηση $1 - 1$ αφού έχει:

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} - 1 = \frac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} < 0 \text{ καθότι } \sqrt{x^2 + 1} > \sqrt{x^2} = |x| \ge x.$$

Για τον ίδιο λόγο είναι $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x > 0$. Έτσι η $f \downarrow$, άρα και $1 - 1$.

Χρειαζόμαστε το σύνολο τιμών της $g(x) = x^3 + \dfrac{3}{2}x^2 - 1$.

Είναι $g'(x) = 3x^2 + 3x$ και από

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x(x+1) = 0 \;\langle\; \begin{matrix} x = 0 \\ x = -1 \end{matrix}$$

Το πρόσημο της $g'(x)$ φαίνεται δίπλα

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	0	$+$	
g		$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	

Είναι $g(-1) = -\dfrac{1}{2}$, $g(0) = -1$ και

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$, οπότε:

Στο $(-\infty, 0)$ το $g(-1) = -\dfrac{1}{2}$ είναι ολικό max, άρα η $g(x) < 0$ και η εξίσωση **αδύνατη**

και στο $[0, +\infty)$ που η $g(x) \uparrow$ έχει Σ. Τιμών το $\left[g(0), \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\right) = \left[\mathbf{-1, +\infty}\right)$

που το $0 \in [-1, +\infty)$, άρα η $g(x)$ έχει **1 μόνο ρίζα $\rho > 0$** καθότι $g(x) \uparrow$.

$\boxed{\text{Γ3}}$ Θέλω ένα τουλάχιστον $x_0 \in \left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$ που να επαληθεύει την εξίσωση

$$\int_{x-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)dt = f\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\cdot \text{εφ}x$$

Έστω $h(x) = \displaystyle\int_{x-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)dt - f\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\cdot \text{εφ}x$ συνεχής στο $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ σαν πράξεις συνεχών.

$\left(\text{η συνάρτηση } \displaystyle\int_{x-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)dt \text{ είναι παραγωγίσιμη, άρα συνεχής, αφού η f συνεχής στο } \mathbb{R}\right)$

Είναι $h\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0 - f(0)\cdot \text{εφ}\dfrac{\pi}{4} = -1 < 0$ και $h(0) = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)dt - 0 > 0$ αφού η $f(x) > 0$ στο $\mathbb{R}$.

Έτσι $h\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot h(0) < 0$, άρα από Θ. Bolzano το ζητούμενο.

ΖΗΤΗΜΑ ④

$\boxed{\Delta 1}$ Από υπόθεση η $f' \uparrow$ στο $(0,+\infty)$ και $f(1) = 1$.

Επίσης $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+5h)-f(1-h)}{h} = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{[f(1+5h)-f(1)]-[f(1-h)-f(1)]}{h} = 0 \Leftrightarrow$

$\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f(1+5h)-f(1)}{h} - \dfrac{f(1-h)-f(1)}{h}\right) = 0 \Leftrightarrow$

$\lim\limits_{h\to 0}\left(5\dfrac{f(1+5h)-f(1)}{1+5h-1} + \dfrac{f(1-h)-f(1)}{1-h-1}\right) = 0 \Leftrightarrow 5f'(1)+f'(1) = 0 \Leftrightarrow \boxed{f'(1) = 0}$

Το $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+5h)-f(1)}{1+5h-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1)$, θέτοντας $1+5h = x$, που

όταν $h \to 0$ το $x \to 1$. Ομοίως και το $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-h)-f(1)}{1-h-1} = f'(1)$, θέτοντας $1-h = x$.

Αφού από υπόθεση η $f' \uparrow$ στο $(0,+\infty)$ $\left\langle \begin{array}{l} \text{για } x>1 \text{ είναι } f'(x) > f'(1) = 0 \text{ άρα } f \uparrow \\ \text{για } x<1 \text{ είναι } f'(x) < f'(1) = 0 \text{ άρα } f \downarrow \end{array}\right.$

Έτσι η $f(x)$ εμφανίζει **ελάχιστο** στο $x_0 = 1$ το $f(1) = 1$ δηλ. $f(x) > 1$ με $x \in (0,+\infty)$, $x \neq 1$.

$\boxed{\Delta 2}$ Από υπόθεση $g(x) = \displaystyle\int_a^x \frac{f(t)-1}{t-1}dt$ στο $(1,+\infty)$ με $a > 1$.

Αφού η συνάρτηση $\dfrac{f(t)-1}{t-1}$ συνεχής στο $(1,+\infty)$ η συνάρτηση $g(x)$ παραγωγίσιμη με

$g'(x) = \dfrac{f(x)-1}{x-1} > 0$ για κάθε $x > 1$. (από προηγούμενο ερώτημα η $f(x) > 1$ για $x > 1$)

Έτσι η συνάρτηση $g(x) \uparrow$ στο $(1,+\infty)$.

Θέλω να λύσω την ανίσωση $\displaystyle\int_{8x^2+5}^{8x^2+6} g(u)du > \int_{2x^4+5}^{2x^4+6} g(u)du$ που είναι της μορφής

$h(8x^2+5) > h(2x^4+5)$ όπου $h(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} g(u)du$ παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με

$h'(x) = \left(\displaystyle\int_x^5 g(u)du + \int_5^{x+1} g(u)du\right)' = g(x+1) - g(x) > 0$ αφού $x+1 > x$ και $g \uparrow$.

Έτσι από $h(8x^2+5) > h(2x^4+5) \overset{h\uparrow}{\Leftrightarrow} 8x^2+5 > 2x^4+5 \Leftrightarrow 2x^2(2-x)(2+x) > 0$.

Με τις ρίζες $x = \pm 2$ και $x = 0$ (διπλή) εύκολα προκύπτει $\mathbf{x \in (-2,0) \cup (0,2)}$.

$\boxed{\Delta 3}$ Έχουμε βρει $g'(x) = \dfrac{f(x) - 1}{x - 1}$ παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με

$$g''(x) = \frac{f'(x)(x-1) - (f(x)-1)}{(x-1)^2} = \frac{f'(x) - \dfrac{f(x)-1}{x-1}}{x-1} = \frac{f'(x) - \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}}{x-1} = \frac{f'(x) - f'(\xi)}{x-1}$$

έχοντας εφαρμόσει το Θ.Μ.Τ στην παραγωγίσιμη, άρα και συνεχή f(x) στο $[1,x]$.

Έτσι με $\xi < x \overset{f'(x) \uparrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi) < f'(x)$ και με $x > 1$ η $g''(x) > 0$ άρα η **g(x) κυρτή**

Θέλω επίσης να λύσω την εξίσωση $(\alpha - 1)\displaystyle\int_\alpha^x \frac{f(t)-1}{t-1}dt = (f(\alpha)-1)(x-\alpha)$.

Αυτή η εξίσωση έχει **προφανή λύση την x = α** και για $x \neq \alpha$ έχουμε:

$$\frac{g(x)}{x-\alpha} = \frac{f(\alpha)-1}{\alpha-1} \underset{\alpha>1}{\overset{g(\alpha)=0}{\Leftrightarrow}} \frac{g(x)-g(\alpha)}{x-\alpha} = g'(\alpha) \overset{\Theta.M.T}{\Leftrightarrow} g'(\xi) = g'(\alpha) \overset{g'\ 1-1}{\Leftrightarrow} \boldsymbol{\xi = \alpha}.$$

Το τελευταίο όμως είναι άτοπο αφού η εφαρμογή του Θ.Μ.Τ. έγινε στο διάστημα $[\alpha,x]$, οπότε $\xi < x$ ή στο διάστημα $[x,\alpha]$, οπότε $\xi > x$.

Άρα η εξίσωση έχει **μία μόνο λύση την x = α**

Καλή Επιτυχία