ΓΕΝΙΚΗ ΠΑΙΔΕΙΑ
Γ Λυκείου

Ζήτημα ①

A1 ⟶ σελ 28 A2 ⟶ σελ 14 A3 ⟶ σελ 87

A4 ⟶ α) → Λ β) → Σ γ) → Λ δ) → Λ ε) → Λ

Ζήτημα ②

B1 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ με $A = \{\omega_1, \omega_4\}$, $B = \{\omega_1, \omega_3\}$.

$$P(\omega_1) = -\frac{1}{2}\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x^3+x^2} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to -1}\frac{x^2+x+1-1}{x(x^2+x)\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)} =$$

$$-\frac{1}{2}\lim_{x\to -1}\frac{1}{x\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)} = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) \text{ δηλ. } \mathbf{P(\omega_1) = \frac{1}{4}}.$$

Η $f(x) = \frac{1}{3}x\ln x$ έχει παράγωγο $f'(x) = \frac{1}{3}(\ln x + 1)$ για $x > 0$ και

ρυθμό μεταβολής στο $x = 1$ την $\mathbf{P(\omega_3) = f'(1) = \frac{1}{3}}$.

B2 Είναι $\{\omega_1\} \subseteq A$ άρα $P(\omega_1) \le P(A) \Leftrightarrow \frac{1}{4} \le 1 - P(A') \Leftrightarrow P(A') \le \frac{3}{4}$.

Επίσης $\{\omega_3\} \subseteq A' = \{\omega_2, \omega_3\}$ άρα $P(\omega_3) \le P(A') \Leftrightarrow \frac{1}{3} \le P(A')$.

B3 Από υπόθεση $P(A') = \frac{3}{4} \Leftrightarrow P(\omega_2) + P(\omega_3) = \frac{3}{4} \overset{P(\omega_3)=\frac{1}{3}}{\Leftrightarrow} \mathbf{P(\omega_2) = \frac{5}{12}}$, οπότε

από $P(\omega_1) + P(\omega_2) + P(\omega_3) + P(\omega_4) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4} + \frac{5}{12} + \frac{1}{3} + P(\omega_4) = 1 \Leftrightarrow \mathbf{P(\omega_4) = 0}$

Το ενδεχόμενο (Α–Β) είναι το $\{\omega_4\}$ και το ενδεχόμενο (Β–Α) είναι το $\{\omega_3\}$ οπότε

$P[(A-B) \cup (B-A)] = P(\omega_3) + P(\omega_4) = \mathbf{\frac{1}{3}}$.

Το ενδεχόμενο $(A'-B') = (A' \cap B) = \{\omega_2, \omega_3\} \cap \{\omega_1, \omega_3\} = \{\omega_3\}$ με $\mathbf{P(A'-B') = \frac{1}{3}}$.

Ζήτημα ③

Γ1 Από υπόθεση αφού η μικρότερη τιμή των παρατηρήσεων είναι 50 και η κεντρική τιμή $x_4 = 85$ έχουμε $3c + \frac{1}{2}c = 85 - 50 \Leftrightarrow \frac{7}{2}c = 35 \Leftrightarrow c = 10$.

Γ2 Έχουμε επίσης $f_4 = 2f_3$ και αφού η διάμεσος $\delta = 75$ (δηλ. η x_3) ισχύει:

$$f_1 + f_2 + \frac{1}{2}f_3 = \frac{1}{2}f_3 + f_4 \Leftrightarrow f_1 + f_2 = f_4 = 2f_3.$$

Αντικαθιστώντας στην $\left(f_1 + f_2\right) + f_3 + f_4 = 1 \Leftrightarrow 2f_3 + f_3 + 2f_3 = 1 \Leftrightarrow \mathbf{f_3 = 0{,}2},$

οπότε $\mathbf{f_4 = 0{,}4}$ και $f_2 = 0{,}4 - f_1$.

Έτσι από $\bar{x} = 74 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{4} x_i f_i = 74 \Leftrightarrow 55f_1 + 65f_2 + 75f_3 + 85f_4 = 74 \Leftrightarrow$

$55f_1 + 65\left(0{,}4 - f_1\right) + 75 \cdot 0{,}2 + 85 \cdot 0{,}4 = 74 \Leftrightarrow -10f_1 + 26 + 15 + 34 = 74 \Leftrightarrow \mathbf{f_1 = 0{,}1.}$

Παρακάτω φαίνεται ο ζητούμενος πίνακας σχετικών συχνοτήτων

ΚΛΑΣΕΙΣ	x_i	$\mathbf{f_i}$		$\mathbf{f_i'}$	$\mathbf{x_i \cdot f_i'}$
[50–60)	55	0,1		1/6	55/6
[60–70)	65	0,3		1/2	65/2
[70–80)	75	0,2		1/3	75/3
[80–90)	85	0,4			
ΣΥΝ.		1		1	200/3

Γ3 Οι παρατηρήσεις που είναι μικρότερες του 80 ανήκουν στις 3 πρώτες κλάσεις και αφού συνολικά τώρα έχουμε $f_1 + f_2 + f_3 = 0{,}6$ θα έχουμε νέες σχ. συχνότητες:

$\mathbf{f_1' = \frac{1}{6}}$, αφού $f_1 = 0{,}1 = \frac{1}{6} \cdot 0{,}6$, $\mathbf{f_2' = \frac{1}{2}}$, αφού $f_2 = 0{,}3 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}6$, $\mathbf{f_3' = \frac{1}{3}}$, αφού $f_3 = 0{,}2 = \frac{1}{3} \cdot 0{,}6$.

Έτσι η νέα μέση τιμή είναι: $\left(\bar{x}\right)' = \sum_{i=1}^{3} x_i f_i' = \frac{55}{6} + \frac{65}{2} + \frac{75}{3} = \mathbf{\frac{200}{3}}$

Γ4 Από υπόθεση οι κ νέες παρατηρήσεις με (έστω)

Μέση Τιμή $\overline{y}$ και Τ. Απόκλιση s_y, ακολουθούν κανονική κατανομή

και αφού το 2,5% αυτών είναι ≥ 74 ισχύει $\overline{y} + 2s_y = 74$

και αφού το 16% αυτών είναι ≤ 68 ισχύει $\overline{y} - s_y = 68$.

Από το σύστημά τους έχουμε $\left\langle \begin{array}{l} \textbf{Μέση Τιμή } \overline{y} = 70 \\ \textbf{Τ. Απόκλιση } s_y = 2 \end{array} \right.$ και συντελεστή

$$CV = \frac{s_y}{\overline{y}} = \frac{2}{70} = \frac{1}{35} < 10\%,$$ άρα το δείγμα είναι ομοιογενές

ΖΗΤΗΜΑ ④

Δ1 Έχουμε $f(x) = x\ln x + k$ με παράγωγο $f'(x) = \ln x + 1$ για $x > 0$.

Είναι $f(1) = k$, $f'(1) = 1$ και αν ε: $y = \lambda x + \beta$ η εφαπτόμενη στο $x = 1$ είναι

$\lambda = f'(1) = 1$, $\beta = k - 1$, οπότε $\boxed{ε: y = x + k - 1}$

Η ε τέμνει τον $x'x$ (για $y = 0$) στο (έστω) $x_A = 1 - k < 0$, αφού $k > 1$

και τον $y'y$ (για $x = 0$) στο (έστω) $y_B = k - 1 > 0$.

Από υπόθεση το εμβαδόν $E_{AOB} < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}|x_A||y_B| < 2 \Leftrightarrow (k-1)^2 < 4$

$k - 1 < 2 \Leftrightarrow$ **$k < 3$,** οπότε ο ακέραιος κ που αναζητούμε με $1 < κ < 3$

είναι ο **$κ = 2$** και η **$f(x) = x\ln x + 2$.**

Δ2 Έχουμε $v = 50$ σημεία (x_i, y_i) της ε: $y = x + 1$ για τα οποία:

α) **$x_i = y_i - 1$** και αφού οι τεταγμένες y_i έχουν $\overline{y} = 31$ από γνωστή εφαρμογή

$\overline{x} = \overline{y} - 1 \Leftrightarrow$ **$\overline{x} = 30$.**

β) Έχουμε νέες παρατηρήσεις (έστω) t_i για τις οποίες:

$t_i = x_i + 3$ για $i = 1, 2, \dots, 20$

$t_i = x_i$ για $i = 21, 22, \dots, 35$

$t_i = x_i - \lambda$ για $i = 36, 37, \dots, 50$

που έχουν $\overline{t} = 31 \Leftrightarrow \dfrac{\sum_{i=1}^{50} t_i}{50} = 31 \Leftrightarrow \dfrac{\sum_{i=1}^{20}(x_i + 3) + \sum_{i=21}^{35} x_i + \sum_{i=36}^{50}(x_i - \lambda)}{50} = 31$

$$\Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^{50} x_i + 20\cdot 3 + 15\cdot(-\lambda)}{50} = 31 \Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^{50} x_i}{50} + \frac{60-15\lambda}{50} = 31 \Leftrightarrow$$

$$\bar{x} + \frac{60-15\lambda}{50} = 31 \Leftrightarrow \frac{60-15\lambda}{50} = 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{\lambda = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}}$$

$\boxed{\textbf{Δ3}}$ Έχουμε $f(x) = x\ln x + 2$ με $f'(x) = \ln x + 1 > 0$ για $x > \frac{1}{e}$.

Έτσι για τα $\frac{1}{e} < \alpha < \beta < \gamma < e$ είναι(αφού η f ↑)

$0 < f\left(\frac{1}{e}\right) = 2 - \frac{1}{e} < f(\alpha) < f(\beta) < f(\gamma) < f(e) = e + 2$, οπότε η μικρότερη

από τις παρατηρήσεις $f'\left(\frac{1}{e}\right)$, $f(\alpha)$, $f(\beta)$, $f(\gamma)$, $f(e)$ είναι η $f'\left(\frac{1}{e}\right) = 0$.

Έτσι το εύρος $\mathbf{R = f(e) - f'\left(\frac{1}{e}\right) = e + 2.}$

Από υπόθεση $\alpha^\alpha\cdot\beta^\beta\cdot\gamma^\gamma = e^7 \Leftrightarrow \ln\left(\alpha^\alpha\cdot\beta^\beta\cdot\gamma^\gamma\right) = \ln e^7 \Leftrightarrow$

$\alpha\ln\alpha + \beta\ln\beta + \gamma\ln\gamma = 7 \overset{+6}{\Leftrightarrow} f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma) = 7 + 6 = 13.$

Έτσι η μέση τιμή των παραπάνω παρατηρήσεων είναι:

$$\bar{x} = \frac{f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma) + f(e) + f'\left(\frac{1}{e}\right)}{5} = \frac{13 + e + 2 + 0}{5} = \mathbf{3 + \frac{e}{5}}.$$

$\boxed{\textbf{Δ4}}$ Έχουμε δειγματικό χώρο Ω με ν = 30 ισοπίθανα ενδεχόμενα.

Είναι $t_i < 1$ για i = 1, 2, ..., 29 και το $t_{30} = 1$ και $t_i < \frac{1}{e}$ για i = 1, 2, ..., 10.

Η εφαπτόμενη της f στο x = t σχηματίζει με τον x΄x οξεία γωνία όταν

$f'(t) > 0 \Leftrightarrow \ln t + 1 > 0 \Leftrightarrow \ln t > -1 \Leftrightarrow t > \frac{1}{e}.$

Έτσι το ενδεχόμενο $A = \left\{t \in \Omega \text{ με } t > \frac{1}{e}\right\} = \left\{t_{11}, t_{12}, \ldots, t_{30}\right\}$ με N(A) = 20 και

$$\mathbf{P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}}.$$

Από υπόθεση $f(t) > f'(t) + 1 \Leftrightarrow t\ln t + 2 > \ln t + 1 + 1 \Leftrightarrow \ln t\left(t - 1\right) > 0$

που ισχύει για κάθε $t \in \Omega$ **εκτός** του $t_{30} = 1$.

Έτσι το ενδεχόμενο $B = \left\{t \in \Omega \text{ με } t < 1\right\} = \left\{t_1, t_2, \ldots, t_{29}\right\}$ με N(B) = 29 και

$$\mathbf{P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{29}{30}}.$$

Είναι $A \cap B = \{t_{11}, t_{12}, \ldots, t_{29}\}$ με $N(A \cap B) = 19$ και $\mathbf{P(A \cap B) = \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)} = \frac{19}{30}}$.

Καλή Επιτυχία